振动方程中的复数

李丹

2026 年 2 月 26 日

1. 为什么会出现复数？

求解振动微分方程时，通常先写出特征方程；当系统阻尼较小、即处于欠阻尼时，特征方程会出现一对共轭复根。这容易让人困惑：振动是实世界中的位移、速度，为何会冒出“虚数”？本文先说明复数的本质，进而探讨它们在振动解中的角色，以及如何还原为可观测的实数解。

2. 复数的本质

2.1 代数角度：多项式方程的完备性

在实数范围内，方程 $x^2+1=0$ 无解。若希望所有一元多项式方程都有根，就必须扩充数系。引入满足 $i^2=-1$ 的“单位” i，并规定与实数按通常运算法则结合，就得到复数：$z=a+bi$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$。在这种定义下，代数基本定理成立：任何非常数复系数多项式在复数域中必有根。因此，特征方程作为多项式方程，在复数域中总能写成一串一次因式的乘积，根可以是实数或成对的共轭复数；这是求解线性微分方程时不得不与复数打交道的代数原因。

2.2 几何角度：平面上的点与旋转

复数 $z=a+bi$ 可与平面上的点 (a,b) 一一对应，横轴为实轴，纵轴为虚轴。加法对应向量相加；乘以实数对应伸缩。乘以 i 相当于绕原点逆时针旋转 90°。更一般地，$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 即欧拉公式，表示单位圆上辐角为 θ 的点，因此乘以 $e^{i\theta}$ 表示旋转 θ。于是复数乘法同时包含“伸缩”与“旋转”，这正是欠阻尼振动中既有衰减又有周期振荡在数学上的对应：复特征根 $\lambda=\sigma\pm i\omega$ 中的 σ 对应伸缩、即衰减或增长，ω 对应旋转、即角频率。

2.3 小结

复数既从代数上保证特征方程总有根，又从几何上用平面上的旋转与伸缩统一描述相位与频率。振动方程的解最终要回到实数，因此，**共轭复根成对出现，其对应的复值解取通过线性组合后得到实解**。

3. 振动方程与特征方程

考虑最简单的单自由度线性振动模型：

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0,$$

其中 $m > 0$ 为质量，$c \geq 0$ 为阻尼系数，$k > 0$ 为刚度，$q(t)$ 为位移。设 $q = e^{\lambda t}$ 形式的非零解，代入得

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k)\, e^{\lambda t} = 0.$$

因为 $e^{\lambda t} \neq 0$，故

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0.$$

这就是特征方程，其根为

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}.$$

- $c^2 > 4mk$，过阻尼：两根为不等实根，解为两个指数函数的线性组合，无振荡。
- $c^2 = 4mk$，临界阻尼：重根，解仍为实指数形式。
- $c^2 < 4mk$，欠阻尼：根为共轭复数

$$\lambda = \sigma \pm i\omega, \qquad \sigma = -\frac{c}{2m}, \quad \omega = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} > 0.$$

此时特征方程在实数范围内无根，只有在复数域中才能写出两个根，进而写出通解。

因此，复数在振动方程解中的作用是：**当特征方程出现共轭复根时，它们直接给出解中的振荡频率 ω 和衰减率 $|\sigma|$；通解形式上会先得到复指数，再通过共轭配对还原为实解。**

4. 从复解到实解

欠阻尼时，特征根为 $\lambda_1 = \sigma + i\omega$ 与 $\lambda_2 = \sigma - i\omega$。微分方程是实的、系数是实的，故若 $q(t)$ 是解，其共轭 $\overline{q(t)}$ 也是解。通解可写成

$$q(t) = C_1 e^{(\sigma+i\omega)t} + C_2 e^{(\sigma-i\omega)t},$$

其中 C_1, C_2 为复常数。利用 $e^{(\sigma\pm i\omega)t} = e^{\sigma t}(\cos\omega t \pm i\sin\omega t)$，有

$$q(t) = e^{\sigma t}\big[(C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t\big].$$

若初值为实数，则解必为实值函数，故 C_1 与 C_2 必须互为共轭，从而 $C_1 + C_2 = 2\,\mathrm{Re}\,C_1$ 和 $i(C_1 - C_2) = -2\,\mathrm{Im}\,C_1$ 都是实数。记 $A = \mathrm{Re}(C_1 + C_2)$，$B = \mathrm{Im}(C_1 - C_2)$，或等价地取两个实常数，则实通解为

$$\boxed{q(t) = e^{\sigma t}\big(A\cos\omega t + B\sin\omega t\big),}$$

其中 A, B 由初值 $q(0)$、$\dot{q}(0)$ 确定。也可写成单一三角函数的形式：

$$q(t) = R\,e^{\sigma t}\cos(\omega t - \varphi), \qquad R = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \varphi = \arctan\frac{B}{A}.$$

这里 R 为振幅，随 $e^{\sigma t}$ 衰减；ω 为角频率，φ 为初相位。三者都是实数，且 ω、σ 直接来自复特征根的虚部与实部。

5. 与实数的关系总结

1. **方程与系数是实的**：m, c, k 及初值均为实数，位移、速度等物理量是实的。

2. **特征方程在实数域内无根**：欠阻尼时 $c^2 < 4mk$，根 $\lambda = \sigma \pm i\omega$ 只存在于复数域；引入复数是求解的中间步骤。

3. **共轭成对保证实解**：两个根互为共轭，对应两个复指数解也互为共轭；取实部或取实常数线性组合即得实通解 $e^{\sigma t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$。

4. **复根直接对应可测量**：$\sigma = -c/(2m)$ 控制衰减快慢，$\omega = \sqrt{4mk - c^2}/(2m)$ 为振动角频率；周期 $T = 2\pi/\omega$，都可实测。振幅与相位 R、φ 由初值决定，也是实数。

因此，复数在振动问题中是一种工具：特征方程在实数范围内不够用，在复数域中写出根后，通过共轭配对和取实部，得到全部实解，且解中的频率、衰减、振幅、相位都与复根一一对应，可在实数世界中测量和理解。