单自由度系统振动

李丹

东南大学土木工程学院

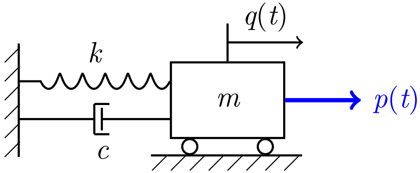
2026 年 2 月 25 日

目录

单自由度系统模型

单自由度（SDOF）系统：质量-弹簧-阻尼系统。

- 质量 m，位移 $q(t)$
- 弹簧刚度 k，阻尼 c
- 外荷载 $p(t)$



动力学方程（牛顿第二定律）：

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = p(t)$$

自由振动概述

- **自由振动**：无外力 $p(t) = 0$，由初始位移 q_0、初始速度 $\dot{q}_0$ 引起。
- 运动方程：

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = 0$$

- 两类讨论：
  1. 无阻尼 $c = 0$：$m\ddot{q} + kq = 0$
  2. 粘滞阻尼 $c > 0$：引入阻尼比 $\zeta = c/(2\sqrt{mk})$

无阻尼自由振动

特征方程：$m\lambda^2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega_n, \quad \omega_n = \sqrt{k/m}$（固有频率）。

通解（三角函数形式）：

$$q(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$$

由初始条件 $q(0) = q_0$，$\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ 得 $A = q_0$，$B = \dot{q}_0/\omega_n$，故

$$q(t) = q_0\cos(\omega_n t) + \frac{\dot{q}_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

固有周期与频率：

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

粘滞阻尼自由振动

归一化方程：$\ddot{q}+2\zeta\omega_n\dot{q}+\omega_n^2 q=0$， $\zeta=\dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$（阻尼比），$c_{\mathrm{cr}}=2\sqrt{mk}$（临界阻尼）。

- **欠阻尼** $\zeta<1$：特征根 $\lambda_{1,2}=\omega_n(-\zeta\pm i\sqrt{1-\zeta^2})$，有阻尼固有频率 $\omega_D=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$q(t)=e^{-\zeta\omega_n t}\left[q_0\cos(\omega_D t)+\frac{\dot{q}_0+\zeta\omega_n q_0}{\omega_D}\sin(\omega_D t)\right]$$

- **临界阻尼** $\zeta=1$：不振荡回到平衡位置。
- **过阻尼** $\zeta>1$：不振荡，衰减更慢。

阻尼自由振动：对数衰减率

阻尼使振幅按 $e^{-\zeta\omega_n t}$ 衰减。连续两波峰比与时间无关：

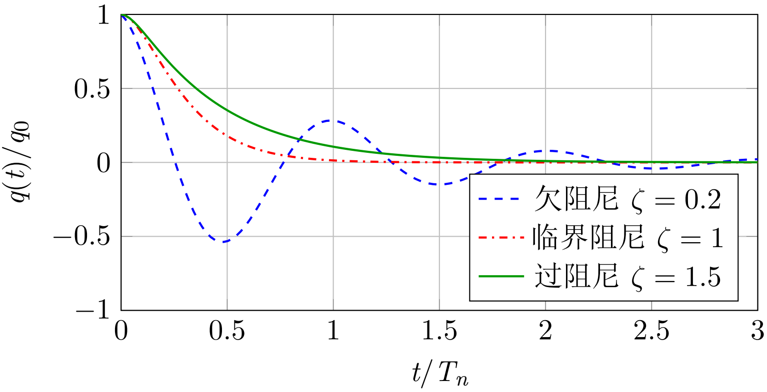
$$\frac{q(t)}{q(t+T_D)} = \exp\left(\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

对数衰减率 $\delta = \ln\frac{q_i}{q_{i+1}} = \dfrac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$。当 $\zeta \ll 1$ 时 $\delta \approx 2\pi\zeta$。

通过 j 个周期的幅值比估计阻尼比：

$$\zeta = \frac{1}{2\pi j}\ln\frac{q_i}{q_{i+j}}$$

阻尼自由振动响应曲线



1
0.5
0
−0.5
−1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
$q(t)/q_0$
t/T_n
欠阻尼 $\zeta = 0.2$
临界阻尼 $\zeta = 1$
过阻尼 $\zeta = 1.5$

无阻尼简谐受迫振动

简谐荷载 $p(t) = p_o \sin(\omega t)$，方程：$m\ddot{q} + kq = p_o \sin(\omega t)$。
特解（$\omega \neq \omega_n$）：

$$q_p(t) = \frac{p_o}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin(\omega t)$$

通解 = 齐次解（瞬态，以 ω_n 振动）+ 特解（稳态，以 ω 振动）。
零初始条件下：

$$q(t) = \frac{p_o}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right)$$

粘滞阻尼简谐受迫振动

方程：$m\ddot{q}+c\dot{q}+kq=p_o\sin(\omega t)$。特解形式
$q_p=C\sin(\omega t)+D\cos(\omega t)$，可写成

$$q(t)=(q_{\text{st}})_o R_d\sin(\omega t-\phi),\quad (q_{\text{st}})_o=\frac{p_o}{k}$$

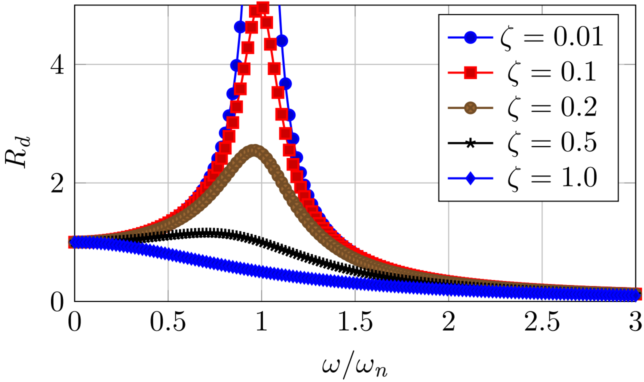
动力放大系数与相位：

$$R_d=\frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2+[2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}},\quad \phi=\tan^{-1}\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

三种频率区：

- $\omega\ll\omega_n$：$R_d\approx 1$，位移由刚度控制。
- $\omega\approx\omega_n$：共振，R_d 大，由阻尼控制。
- $\omega\gg\omega_n$：$R_d\to 0$，位移由质量控制。

动力放大系数 R_d


$\zeta = 0.01$
$\zeta = 0.1$
$\zeta = 0.2$
$\zeta = 0.5$
$\zeta = 1.0$
R_d
ω/ω_n
0
2
4
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

共振与半功率带宽

共振频率（$\zeta < 1/\sqrt{2}$）：

- 位移：$\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$
- 速度：ω_n
- 加速度：$\omega_n/\sqrt{1-2\zeta^2}$

半功率带宽：幅值降为共振幅值的 $1/\sqrt{2}$ 时两频率差。小阻尼时

$$\zeta \approx \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_n}$$

可用于由频响曲线估计阻尼比。

加速度计简述

加速度计可视为附着在待测物体上的质量-弹簧-阻尼系统。用相对位移 q 反映物体加速度 $\ddot{q}_g$：

$$q(t) \propto -\frac{R_d}{\omega_n^2}\,\ddot{q}_g(t-\phi/\omega)$$

设计目标：在测量频段内 $R_d \approx 1$ 且 ϕ/ω 近似常数（如 $\zeta \approx 0.7$，$\omega/\omega_n < 0.5$），以减小幅值与相位失真。动力传感器均有频率适用范围。

单位脉冲响应与卷积

将任意荷载 $p(t)$ 视为一系列脉冲之和。**单位脉冲响应函数**（$t \geq \tau$）:

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\big(\omega_D(t-\tau)\big)$$

系统对 $p(t)$ 的响应（零初始条件）为**卷积积分**:

$$q(t) = \int_0^t p(\tau)\, h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

代入 h 得 **杜哈梅积分**:

$$q(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau)\, e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\big(\omega_D(t-\tau)\big)\, \mathrm{d}\tau$$

时间步进法概述

连续时间离散为 t_i，步长 Δt。已知 $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$ 与 p_i，求 $q_{i+1}, \dot{q}_{i+1}, \ddot{q}_{i+1}$。运动方程在每步：

$$m\ddot{q}_i + c\dot{q}_i + kq_i = p_i$$

常用方法：纽马克-β 法、威尔逊-θ 法、龙格-库塔法。

纽马克-β 法（单自由度 1/2）

在时间步 $[t_i, t_{i+1}]$ 上，Newmark 公式为

$$\dot q_{i+1} = \dot q_i + \Delta t\big[(1-\gamma)\ddot q_i + \gamma\ddot q_{i+1}\big],$$

$$q_{i+1} = q_i + \Delta t\,\dot q_i + \Delta t^2\big[(0.5-\beta)\ddot q_i + \beta\ddot q_{i+1}\big].$$

为便于与运动方程联立，定义系数

$$a_0 = \frac{1}{\beta\,\Delta t^2},\quad a_1 = \frac{\gamma}{\beta\,\Delta t},\quad a_2 = \frac{1}{\beta\,\Delta t},$$

$$a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1,\quad a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1,\quad a_5 = \Delta t\Big(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\Big).$$

则可以把加速度和速度写成关于位移增量的形式：

$$\ddot q_{i+1} = a_0(q_{i+1} - q_i) - a_2\dot q_i - a_3\ddot q_i,$$

$$\dot q_{i+1} = a_1(q_{i+1} - q_i) - a_4\dot q_i - a_5\ddot q_i.$$

常用参数：$\gamma = 1/2$，平均加速度法取 $\beta = 1/4$、线性加速度法取 $\beta = 1/6$。

纽马克-β 法（单自由度 2/2）

在 t_{i+1} 时刻，单自由度运动方程为

$$m\ddot{q}_{i+1} + c\dot{q}_{i+1} + kq_{i+1} = p_{i+1}.$$

代入上一页的 $\ddot{q}_{i+1}, \dot{q}_{i+1}$ 表达式，可以整理成

$$\hat{k}\, q_{i+1} = \hat{p}_{i+1},$$

其中

$$\hat{k} = k + a_0 m + a_1 c$$

为等效刚度，

$$\hat{p}_{i+1} = p_{i+1} + m\big(a_0 q_i + a_2 \dot{q}_i + a_3 \ddot{q}_i\big) + c\big(a_1 q_i + a_4 \dot{q}_i + a_5 \ddot{q}_i\big)$$

为等效荷载。**每一步的计算流程：**

1. 已知 $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$ 和 p_{i+1}，先构造 $\hat{k}$、$\hat{p}_{i+1}$。
2. 解线性方程 $\hat{k}q_{i+1} = \hat{p}_{i+1}$。
3. 代回公式更新 $\ddot{q}_{i+1}, \dot{q}_{i+1}$。

威尔逊-θ 法：在 $[t_i,\, t_i+\theta\Delta t]$ 内假设加速度线性变化，$\theta \geq 1.37$ 时无条件稳定，常取 $\theta = 1.4$。先求 $t_i+\theta\Delta t$ 时刻量，再线性外推到 t_{i+1}。

龙格-库塔法：针对一阶 ODE $\dot{x} = f(t,x)$。二阶 RK（示例）：

$$v_1 = f(t_i, x_i), \quad v_2 = f(t_i + h, x_i + hv_1), \quad x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}(v_1 + v_2)$$

四阶 RK 用 4 个斜率加权得到 x_{i+1}。将 SDOF 二阶方程化为状态空间 $\mathbf{x} = (q, \dot{q})^\top$，$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}p(t)$，即可用 RK 求解。

本章小结

- **SDOF 运动方程：**$m\ddot{q}+c\dot{q}+kq=p(t)$；$\omega_n=\sqrt{k/m}$，$\zeta=c/(2\sqrt{mk})$。
- **自由振动：**无阻尼时 $q=q_0\cos(\omega_n t)+(\dot{q}_0/\omega_n)\sin(\omega_n t)$；有阻尼时指数衰减与 $\omega_D=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$，对数衰减率估 ζ。
- **简谐受迫：**稳态 R_d、ϕ；共振与半功率带宽；加速度计频率范围。
- **任意荷载：**单位脉冲响应 $h(t-\tau)$，卷积/杜哈梅积分。
- **数值方法：**纽马克-β（平均/线性加速度）、威尔逊-θ、龙格-库塔与状态空间。

谢谢！