多自由度系统振动

李丹

东南大学土木工程学院

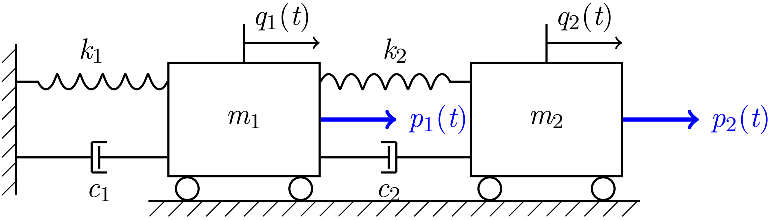
2026 年 2 月 25 日

目录

两自由度系统模型

以两自由度质量-弹簧-阻尼系统说明多自由度建模。

- 两个质量 m_1, m_2
- 弹簧 k_1, k_2，阻尼 c_1, c_2
- 外荷载 $p_1(t), p_2(t)$
- 位移 $q_1(t), q_2(t)$



MDOF 运动方程与矩阵形式

根据牛顿第二定律写出两自由度系统方程：

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{q}_1 &= p_1 - k_1 q_1 + k_2(q_2 - q_1) - c_1\dot{q}_1 + c_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1),\\
m_2\ddot{q}_2 &= p_2 + k_2(q_1 - q_2) + c_2(\dot{q}_1 - \dot{q}_2).
\end{aligned}
$$

一般 N 自由度系统矩阵形式：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{p}$$

其中 $\mathbf{M}$、$\mathbf{C}$、$\mathbf{K}$ 为质量、阻尼、刚度矩阵，$\mathbf{q}$ 位移向量。

无阻尼多自由度自由振动

无阻尼自由振动方程：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0,\ \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0.$$

- 一般情况下响应不是简单正弦，而是多种模态叠加。
- 对于每一阶模态 j，存在模态向量 ϕ_j 和固有频率 ω_j：

$$\mathbf{q}_j(t) = \phi_j \bar{q}_j(t), \quad \bar{q}_j(t) = A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t).$$

- 多自由度系统有 N 组 (ω_j, ϕ_j)，称为固有频率和振型（模态）。

特征值问题：固有频率与振型

将 $\mathbf{q}_j(t) = \boldsymbol{\phi}_j \bar{q}_j(t)$ 代入无阻尼方程得到：

$$(\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi}_j = \mathbf{0}.$$

- 非平凡解存在条件：

$$\det(\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}) = 0$$

——N 阶多项式，给出 N 个 ω_j^2。

- 对每个 ω_j，求解对应特征向量 $\boldsymbol{\phi}_j$（只确定形状，不定幅值）。
- 把各阶模态组成模态矩阵：

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{\phi}_2 & \dots & \boldsymbol{\phi}_N \end{bmatrix}.$$

模态正交性与模态质量/刚度

对于不同模态 $r \neq s$，有正交性：

$$\boldsymbol{\phi}_s^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_r = 0, \quad \boldsymbol{\phi}_s^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_r = 0.$$

- 由此可将质量、刚度矩阵对角化：

$$\bar{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}, \quad \bar{\mathbf{K}} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}.$$

- 对角元为模态质量、模态刚度：

$$\bar{m}_j = \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_j, \quad \bar{k}_j = \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_j = \omega_j^2 \bar{m}_j.$$

模态归一化与模态展开

- 振型只确定相对大小，可按需要归一化：

$$\phi_j \to \tilde{\phi}_j, \quad \tilde{\phi}_j^T \mathbf{M} \tilde{\phi}_j = 1 \Rightarrow \bar{m}_j = 1,\ \bar{k}_j = \omega_j^2.$$

- 用 N 个模态作为基展开结构位移（模态展开）：

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^{N} \phi_j \bar{q}_j(t) = \mathbf{\Phi}\, \bar{\mathbf{q}}(t).$$

- 模态坐标（正则坐标）可由

$$\bar{q}_s = \frac{\phi_s^T \mathbf{M} \mathbf{q}}{\phi_s^T \mathbf{M} \phi_s}$$

计算得到。

无阻尼系统的模态叠加解

当已知所有 $\omega_j, \boldsymbol{\phi}_j$ 时，无阻尼自由振动通解可写成各模态叠加：

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_j \left(\bar{q}_j(0)\cos(\omega_j t) + \frac{\dot{\bar{q}}_j(0)}{\omega_j}\sin(\omega_j t) \right).$$

其中初始模态坐标由

$$\bar{q}_j(0) = \frac{\boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M}\mathbf{q}(0)}{\bar{m}_j}, \quad \dot{\bar{q}}_j(0) = \frac{\boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(0)}{\bar{m}_j}$$

给出。

有阻尼多自由度自由振动与经典阻尼

有阻尼自由振动方程：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}.$$

- **经典阻尼**条件：$\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$。
- 经典阻尼下，模态与无阻尼系统相同，可令 $\mathbf{q} = \mathbf{\Phi}\,\bar{\mathbf{q}}$，左乘 $\mathbf{\Phi}^T$ 得
$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0},$$
其中 $\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}$，$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}$，$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi}$。
- 对经典阻尼，$\bar{\mathbf{C}}$ 也是对角矩阵，模态坐标下各阶互不耦合。

各阶模态阻尼与阻尼自由振动解

对第 j 阶模态，有标量方程：

$$\bar{m}_j\ddot{\bar{q}}_j + \bar{c}_j\dot{\bar{q}}_j + \bar{k}_j\bar{q}_j = 0.$$

- 定义模态阻尼比

$$\zeta_j = \frac{\bar{c}_j}{2\bar{m}_j\omega_j}, \quad \omega_j = \sqrt{\bar{k}_j/\bar{m}_j}.$$

- 方程可写成

$$\ddot{\bar{q}}_j + 2\zeta_j\omega_j\dot{\bar{q}}_j + \omega_j^2\bar{q}_j = 0,$$

  与单自由度粘滞阻尼系统完全同形。
- 欠阻尼 ($\zeta_j < 1$) 时，有阻尼固有频率 $\omega_{Dj} = \omega_j\sqrt{1-\zeta_j^2}$，解为

$$\bar{q}_j(t) = e^{-\zeta_j\omega_j t}\left[\bar{q}_j(0)\cos(\omega_{Dj}t) + \frac{\dot{\bar{q}}_j(0) + \zeta_j\omega_j\bar{q}_j(0)}{\omega_{Dj}}\sin(\omega_{Dj}t)\right].$$

- 结构总响应为各模态响应叠加：$\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\Phi}\,\bar{\mathbf{q}}(t)$。

结构阻尼与瑞利阻尼

实际结构的阻尼难以直接从几何与材料精确得到，通常通过模态阻尼比来构造阻尼矩阵。

- **质量比例与刚度比例阻尼：**

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} \quad \text{或} \quad \mathbf{C} = a_1\mathbf{K}.$$

  模态阻尼比分别为

$$\zeta_j = \frac{a_0}{2}\frac{1}{\omega_j}, \qquad \zeta_j = \frac{a_1}{2}\omega_j.$$

- **瑞利阻尼：**质量比例 + 刚度比例的线性组合

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K},$$

  阻尼比随频率变化

$$\zeta_j = \frac{a_0}{2}\frac{1}{\omega_j} + \frac{a_1}{2}\omega_j.$$

- 可选两阶代表模态 (ω_i, ζ_i)、(ω_j, ζ_j) 解方程组求 a_0, a_1，保证主要模态阻尼比接近目标值。

考伊阻尼

为了在**多于两阶模态**上同时控制阻尼比，可采用更一般的考伊（Caughey）阻尼：

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \sum_{k=0}^{L-1} a_k \left(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\right)^k.$$

- 瑞利阻尼是 $L = 2$ 时的特例（只保留 a_0, a_1）。
- 第 i 阶模态的阻尼比为

$$\zeta_i = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{L-1} a_k \, \omega_i^{2k-1}.$$

- 给定若干阶模态的期望阻尼比 ζ_i，可写出线性方程组求解 a_k。
- 需注意避免高阶模态出现**负阻尼比**（会导致自由振动发散）。

模态截断与降阶模型

多自由度系统在一般荷载下：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{p}(t).$$

- 大型结构自由度 N 很大，直接时间积分代价高。
- 将位移近似为前 L 阶模态的线性组合（模态截断）：

$$\mathbf{q} \approx \sum_{j=1}^{L} \phi_j \bar{q}_j = \mathbf{\Phi}_{1:L}\bar{\mathbf{q}}.$$

- 代入并左乘 $\mathbf{\Phi}_{1:L}^T$，得到降阶方程：

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{p}}(t),$$

  维数从 N 降到 $L \ll N$。

对降阶后的模态方程或原方程都可以使用 Newmark-β 法时间积分。

- **初始化：**
  - 求无阻尼特征值问题，得到 $\mathbf{\Phi}$，选取前 L 阶模态。
  - 根据给定初始条件 $\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0$ 计算初始模态坐标

$$(\bar{q}_j)_0 = \frac{\boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0}{\boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_j}, \quad (\dot{\bar{q}}_j)_0 = \frac{\boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0}{\boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_j}.$$

- **组装等效质量、阻尼、刚度矩阵：**

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{\Phi}_{1:L}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi}_{1:L}, \ \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{\Phi}_{1:L}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi}_{1:L}, \ \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{\Phi}_{1:L}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi}_{1:L}.$$

Newmark-β 法求解 MDOF（时间步进 1/2）

选定 Newmark 参数（如平均加速度法 $\beta = 1/4, \gamma = 1/2$），时间步长 Δt。在模态坐标下，Newmark 公式为

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}}_{i+1} = \dot{\bar{\mathbf{q}}}_i + \Delta t\big[(1-\gamma)\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_i + \gamma\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{i+1}\big],$$

$$\bar{\mathbf{q}}_{i+1} = \bar{\mathbf{q}}_i + \Delta t\,\dot{\bar{\mathbf{q}}}_i + \Delta t^2\big[(\tfrac{1}{2}-\beta)\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_i + \beta\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{i+1}\big].$$

为便于写成矩阵形式，定义系数

$$a_0 = \frac{1}{\beta\,\Delta t^2},\quad a_1 = \frac{\gamma}{\beta\,\Delta t},\quad a_2 = \frac{1}{\beta\,\Delta t},$$

$$a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1,\quad a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1,\quad a_5 = \Delta t\Big(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\Big).$$

则可将加速度、速度写成关于位移增量的显式形式：

$$\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{i+1} = a_0\big(\bar{\mathbf{q}}_{i+1} - \bar{\mathbf{q}}_i\big) - a_2\dot{\bar{\mathbf{q}}}_i - a_3\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_i,$$

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}}_{i+1} = a_1\big(\bar{\mathbf{q}}_{i+1} - \bar{\mathbf{q}}_i\big) - a_4\dot{\bar{\mathbf{q}}}_i - a_5\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_i.$$

Newmark-β 法求解 MDOF（时间步进 2/2）

降阶模态方程在 t_{i+1} 时刻为

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{i+1} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\bar{\mathbf{q}}}_{i+1} + \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{q}}_{i+1} = \bar{\mathbf{p}}_{i+1}.$$

将前一页的 $\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{i+1}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{i+1}$ 表达式代入，可得

$$\hat{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{q}}_{i+1} = \hat{\mathbf{p}}_{i+1},$$

其中

$$\hat{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{K}} + a_0\bar{\mathbf{M}} + a_1\bar{\mathbf{C}}$$

为等效刚度矩阵，而等效荷载向量为

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}}_{i+1} = \bar{\mathbf{p}}_{i+1} &+ \bar{\mathbf{M}}\left(a_0\bar{\mathbf{q}}_i + a_2\dot{\bar{\mathbf{q}}}_i + a_3\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_i\right)\\ &+ \bar{\mathbf{C}}\left(a_1\bar{\mathbf{q}}_i + a_4\dot{\bar{\mathbf{q}}}_i + a_5\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_i\right).\end{aligned}$$

时间步算法：

1. 已知 $\bar{\mathbf{q}}_i, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_i, \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_i$ 和 $\bar{\mathbf{p}}_{i+1}$，先按上式组装 $\hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{p}}_{i+1}$。
2. 解线性方程 $\hat{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{q}}_{i+1} = \hat{\mathbf{p}}_{i+1}$。
3. 代回 $\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{i+1}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{i+1}$ 的公式更新加速度和速度。
4. 如需物理坐标响应，用 $\mathbf{q}_{i+1} \approx \mathbf{\Phi}_{1:L}\bar{\mathbf{q}}_{i+1}$ 恢复。

本章小结

- 建立多自由度系统的矩阵形式运动方程 $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{p}$。
- 通过广义特征值问题 $(\mathbf{K} - \omega_j^2\mathbf{M})\phi_j = \mathbf{0}$ 求固有频率与振型。
- 利用模态正交性对角化质量与刚度矩阵，得到模态质量、模态刚度，并进行模态归一化与模态展开。
- 引入经典阻尼、模态阻尼比以及瑞利阻尼、考伊阻尼等结构阻尼模型。
- 通过模态截断与 Newmark-β 法进行多自由度数值时程分析。

谢谢！