数据基本分析方法

李丹

东南大学土木工程学院

2026 年 2 月 26 日

目录

时域分析概述

- 振动信号：连续信号 $x(t)$ 与采样得到的离散信号 $x[n]$。
- 时域分析关注信号随时间的波形、幅值统计特征与相关性。
- 主要内容：
  - 统计特征（均值、均方根、方差/标准差、偏度、峭度）
  - 自相关与互相关

统计特征：均值与均方根

均值（Mean）刻画信号的平均水平：

$$\mu_x = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt, \qquad \mu_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n].$$

均方根值（RMS）反映信号能量与振动强度：

$$x_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt}, \qquad x_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]}.$$

统计特征：方差、标准差、偏度、峭度

方差与**标准差**描述幅值相对均值的离散程度：

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (x(t)-\mu_x)^2 dt, \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-\mu_x)^2, \quad \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}.$$

偏度（Skewness）刻画分布左右不对称性：

$$S = \frac{\frac{1}{T}\int_0^T (x(t)-\mu_x)^3 dt}{\sigma_x^3}, \quad S = \frac{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-\mu_x)^3}{\sigma_x^3}.$$

峭度（Kurtosis）反映分布尖峰程度、冲击成分：

$$K = \frac{\frac{1}{T}\int_0^T (x(t)-\mu_x)^4 dt}{\sigma_x^4}, \quad K = \frac{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-\mu_x)^4}{\sigma_x^4}.$$

自相关函数

自相关描述信号在不同时间延迟下的相似程度，可用于判断周期性与随机性。

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)\,dt, \quad R_{xx}[m] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-m} x[n]x[n+m].$$

- 周期信号的自相关同样呈周期性。
- 随机噪声的自相关除零延迟外迅速衰减。

函数内积与投影

在区间 $[a,b]$ 上，函数内积定义为

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y}(t)\,dt,$$

对应的范数

$$\|x(t)\| = \big(\langle x(t), x(t)\rangle\big)^{1/2}.$$

类似向量投影，函数 $x(t)$ 在 $y(t)$ 上的投影：

$$\mathrm{proj}_y x(t) = \frac{\langle x(t), y(t)\rangle}{\langle y(t), y(t)\rangle} y(t).$$

傅里叶级数/变换可以看作将信号投影到一组**正交正弦/余弦（或复指数）基函数**上。

函数内积的几何理解

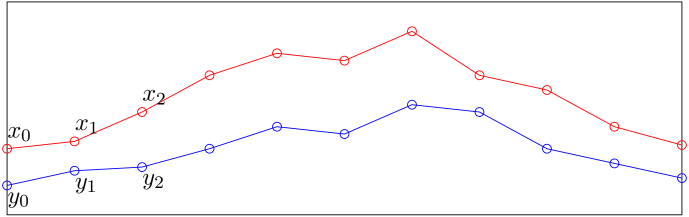

图: 函数内积与向量内积的关系示意

傅里叶级数

对于 2π 周期函数：

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt \, dt,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin nt \, dt.$$

也可写成复指数形式

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

其中 c_n 为投影到正交基 $\psi_n = e^{int}$ 后的“坐标”。

傅里叶变换

对一般非周期函数，采用傅里叶变换：

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t}\, dt,$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega.$$

常用性质：

- 线性：$\mathcal{F}\{\alpha x + \beta y\} = \alpha X + \beta Y$。
- 导数：$\mathcal{F}\{x^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n X(\omega)$。
- Parseval 定理（能量守恒）：$\int |X|^2 d\omega = 2\pi \int |x|^2 dt$。
- 卷积定理：时域卷积对应频域乘积。

离散傅里叶变换（DFT）

对长度为 N 的采样序列 $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_{N-1})^T$：

$$X_m = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi nm/N}, \quad m = 0, \ldots, N-1.$$

逆变换：

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{i2\pi nm/N}, \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

矩阵形式可写为

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x},$$

其中 $\mathbf{W}$ 为复指数矩阵，$w_N = e^{-i2\pi/N}$。DFT 将时间序列映射到频率域，幅值和相位都有物理意义。

快速傅里叶变换（FFT）与应用

直接用 DFT 计算复杂度为 $O(N^2)$，FFT 利用奇偶分解与对称性，将复杂度降为 $O(N\log N)$。

- 当 $N=2^p$ 时，可反复把 N 点 DFT 分解为两个 $N/2$ 点 DFT。
- 工程中通常通过在序列后补零，使长度成为 2^p，便于应用 FFT。
- 振动分析中常用 FFT 计算**频谱与功率谱密度（PSD）**，用于识别主要频率成分和噪声。

FFT 典型应用：对含噪信号进行频域滤波——保留感兴趣频段（峰值附近），抑制其他频率分量，再做逆变换恢复时域信号。

FFT 应用示例：滤波降噪（1/2）

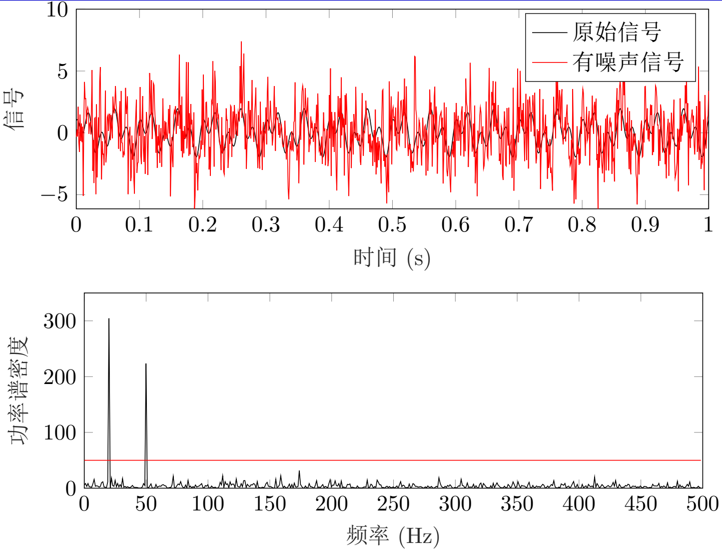

图: 含噪信号及其功率谱密度（PSD）

FFT 应用示例：滤波降噪（2/2）

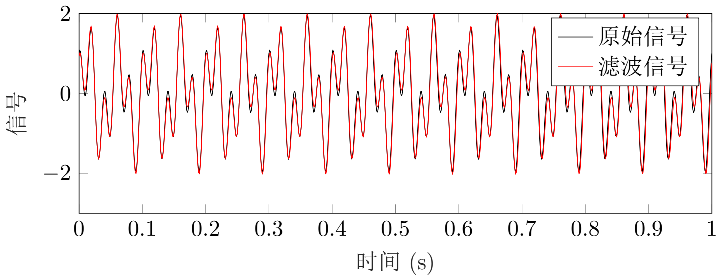

图: 频域滤波后的信号波形（与理想信号对比）

- 在频谱中保留主峰（目标频率），抑制其他频率分量。
- 通过逆 FFT 将滤波后的频谱变回时域，得到平滑、接近理想的信号。

对任意 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，SVD 给出分解

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T,$$

其中

- $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m\times m}$、$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为正交矩阵；
- $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为非负奇异值对角矩阵，$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq 0$;
- 列向量 $\mathbf{u}_i$ 为左奇异向量、$\mathbf{v}_i$ 为右奇异向量。

在振动测试中，$\mathbf{X}$ 常为“通道数 $\times$ 采样点数”的响应矩阵。

SVD 在振动数据中的物理意义

设位移测量数据矩阵 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$：

- 左奇异向量 $\mathbf{u}_i$：描述各测点之间的**空间模式**，常与结构振型相对应。
- 奇异值 σ_i：反映第 i 个模式在数据中的**能量大小**，可用于模态截断与降噪。
- 右奇异向量 $\mathbf{v}_i$：描述对应空间模式的**时间历程**。

典型应用：

- 从多通道响应中提取主模态/主成分；
- 识别结构主要振动模式；
- 分离信号与噪声，做低秩近似。

- 掌握时域统计特征（均值、RMS、方差/标准差、偏度、峭度）及自相关、互相关的物理意义与计算公式。
- 理解傅里叶级数、傅里叶变换、DFT 与 FFT 的基本概念及其在振动信号频域分析中的作用。
- 了解 SVD 的数学形式与物理含义，能将其用于多通道振动数据的模态提取与降噪。

谢谢!