信号采集

李丹

东南大学土木工程学院

2026 年 2 月 26 日

目录

引言

振动分析需将模拟信号 $x(t)$ 采样为离散信号 $x[n]$。通常为等间隔采样。

- 正弦信号 $x(t) = A\sin(2\pi ft + \phi)$，采样间隔 T 时：

$$x[n] = x(nT) = A\sin(2\pi fnT + \phi).$$

- 能否由 $x[n]$ 唯一恢复 $x(t)$？关键在采样频率 $f_s = 1/T$ 与信号频率 f 的关系。
- 分三种情况：$f_s = 2f$、$f_s < 2f$、$f_s > 2f$。

$f_s = 2f$：无法唯一恢复

此时 $x[n] = A\sin(n\pi + \phi) = (-1)^n A\sin\phi$，仅两种取值。

- 可构造另一正弦 $x_1(t) = A_1\sin(2\pi f t + \phi_1)$ 使 $A_1\sin\phi_1 = A\sin\phi$，则 $x_1[n] = x[n]$。
- 离散序列相同，无法唯一确定原信号。

$f_s < 2f$：混叠

可构造高频信号 $x_1(t) = A\sin(2\pi f_1 t + \phi)$，$f_1 = f + k/T$（$k \in \mathbb{Z}^+$）。由三角恒等知 $x_1[n] = x[n]$，两不同频率信号采样后一致，无法唯一恢复。

$f_s > 2f$：可唯一恢复

令 $\theta = 2\pi f T$，三采样点满足

$$2x[1]\cos\theta = x[0] + x[2].$$

因 $f_s > 2f$ 故 $0 < \theta < \pi$，可唯一解出 θ（即 f），再由 $x[0], x[1]$ 求 A, ϕ：

$$A = \sqrt{(x[0])^2 + \left(\frac{x[1] - x[0]\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}, \quad \phi = \arctan\frac{x[0]\sin\theta}{x[1] - x[0]\cos\theta}.$$

结论：$f_s > 2f$ 时可由 $x[n]$ 唯一确定 $x(t)$。

正弦信号采样示意（1/2）：$f_s = 2f$

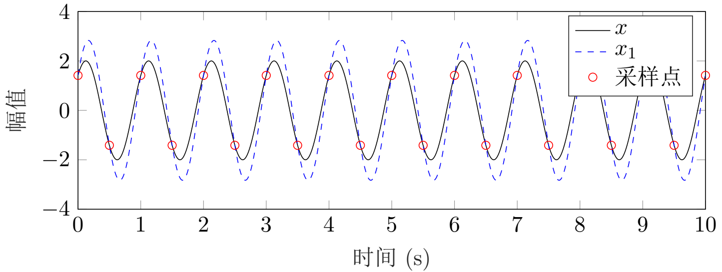

图: $f_s = 2f$ 时两组不同正弦信号采样结果相同，无法唯一恢复

正弦信号采样示意（2/2）：$f_s < 2f$

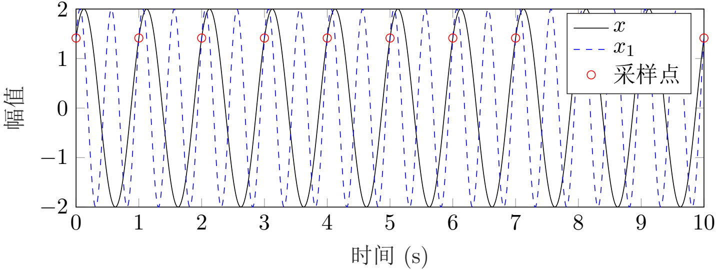

图: $f_s < 2f$ 时低频与高频正弦采样点重合，产生混叠

冲激串与采样信号

周期为 T 的单位冲激串：

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

采样信号（时域相乘）：

$$x_s(t) = x(t)\,\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t - nT).$$

$\delta_T(t)$ 的傅里叶变换为频域冲激串：

$$\Delta_T(\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}.$$

采样后频谱与奈奎斯特定理

时域相乘对应频域卷积（乘 $1/(2\pi)$）：

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s).$$

即 $X_s(\omega)$ 是 $X(\omega)$ 以 ω_s 为周期的周期延拓。

- 若 $x(t)$ 带限，$X(\omega) = 0$ 当 $|\omega| > \omega_B$，则**不混叠**条件为

$$\omega_B < \frac{\omega_s}{2} \quad \Leftrightarrow \quad f_s > 2f_B.$$

- **奈奎斯特-香农采样定理：**带限信号可由采样无失真恢复的条件是 $f_s > 2f_B$。f_B 称奈奎斯特频率，$2f_B$ 称奈奎斯特速率。

冲激串及其频谱

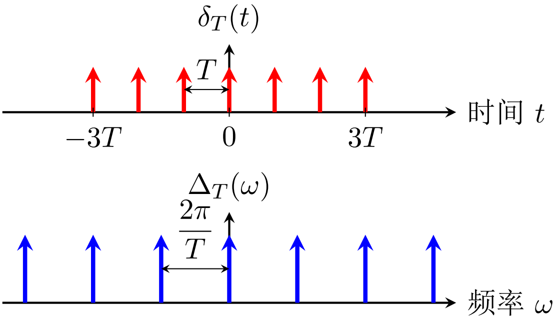

图: 冲激串函数 $\delta_T(t)$ 及其频谱 $\Delta_T(\omega)$

采样后频谱的周期延拓（1/2）

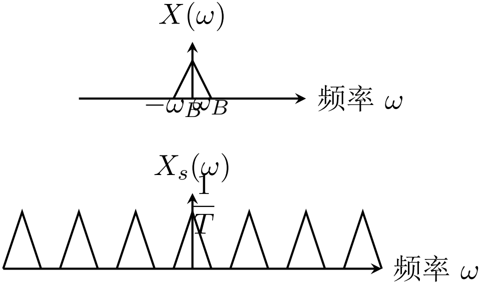

图: 带限信号 $X(\omega)$ 与采样后频谱 $X_s(\omega)$（$\omega_s > 2\omega_B$ 无混叠）

采样后频谱的周期延拓（2/2）：混叠

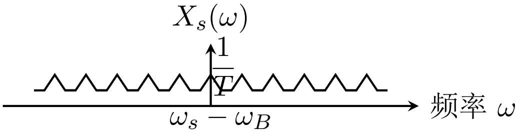

图: $\omega_s < 2\omega_B$ 时周期延拓重叠，产生混叠

理想低通与 sinc 插值

采样信号 $x_s(t)=\sum_n x[n]\delta(t-nT)$ 经理想低通滤波器

$$H(\omega)=\begin{cases}T, & |\omega|<\omega_s/2\\ 0, & |\omega|\geq\omega_s/2\end{cases}$$

得到重构 $x_r(t)$。$H(\omega)$ 的逆变换为

$$h(t)=\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}=\operatorname{sinc}(t/T).$$

重构公式（sinc 插值）：

$$x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\operatorname{sinc}(t/T-n).$$

各采样点上仅对应 sinc 为 1，其余为 0，采样点间由加权叠加得到。

通过理想低通滤波器重构

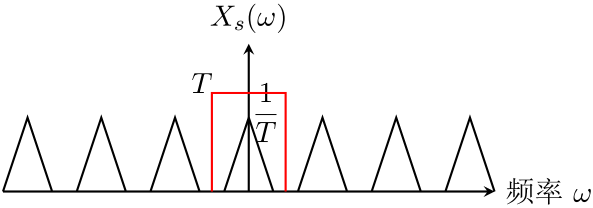

图: 理想低通 $H(\omega)$ 保留基带，得到 $X_r(\omega) = X(\omega)$

sinc 函数

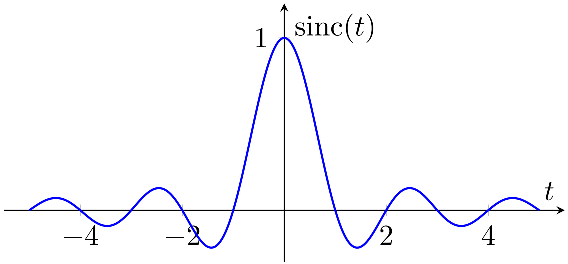

图: $\mathrm{sinc}(t) = \sin(\pi t)/(\pi t)$，插值核

信号重构示例（1/2）

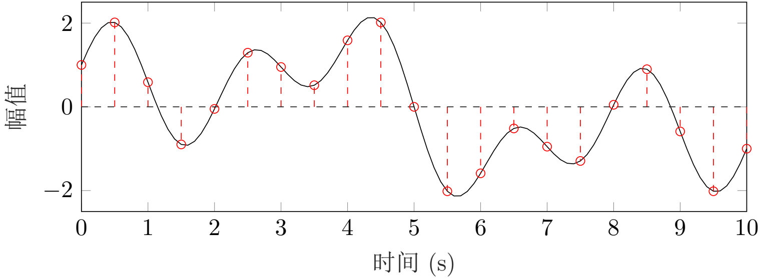

图: 采样过程

信号重构示例（2/2）

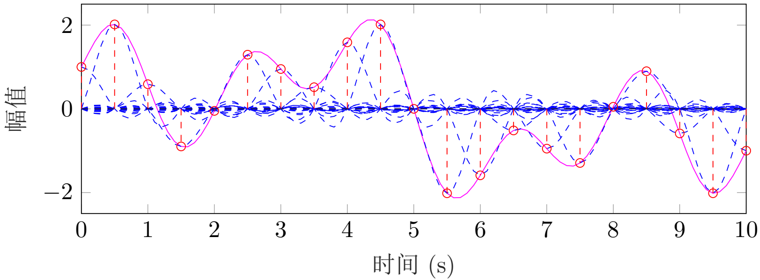

图: 由采样点经 sinc 插值重构连续信号

抗混叠滤波的作用

实际信号往往非严格带限，或含宽带噪声，采样后高频会折叠到低频（混叠）。在 A/D 前加低通滤波，将信号限制在 $f < f_s/2$ 内，该滤波器称为**抗混叠滤波器**。理想形式：

$$H_a(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \leq \pi/T \\ 0, & |\omega| \geq \omega_c \end{cases}$$

理想低通非因果，物理无法实现，工程中用 RC、贝塞尔等近似。

一阶 RC 低通：$H(\omega) = 1/(1 + i\omega RC)$，

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad \phi(\omega) = -\arctan(\omega RC).$$

截止频率 $\omega_c = 1/(RC)$（$-3\,\mathrm{dB}$ 点）。
贝塞尔低通：通带内群延迟 $\tau_g(\omega)$ 近似平坦，波形保真好，适合需要保持时域形状的场合。二阶贝塞尔 $H(\omega) = \omega_o^2/(-\omega^2 + i\sqrt{3}\omega_o\omega + \omega_o^2)$，$\omega_c \approx 0.786\omega_o$。

一阶 RC 低通滤波器电路

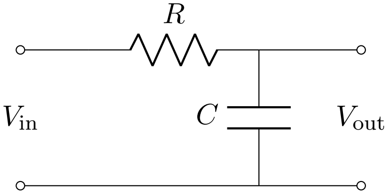

图: 一阶 RC 低通滤波器，截止频率 $\omega_c = 1/(RC)$

RC 低通滤波器频响特性

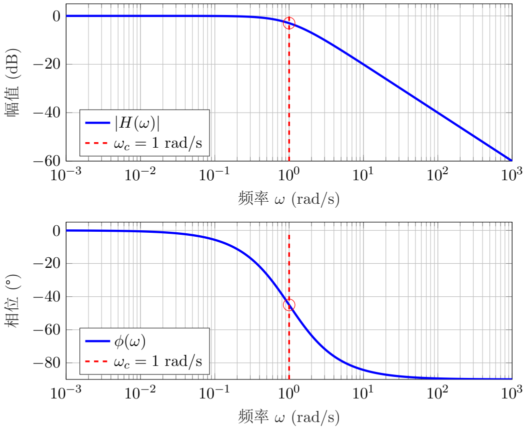

图: 幅频与相频、群延迟（$R = 1\,\mathrm{k}\Omega$，$C = 1\,\mathrm{mF}$）

贝塞尔低通滤波器频响特性

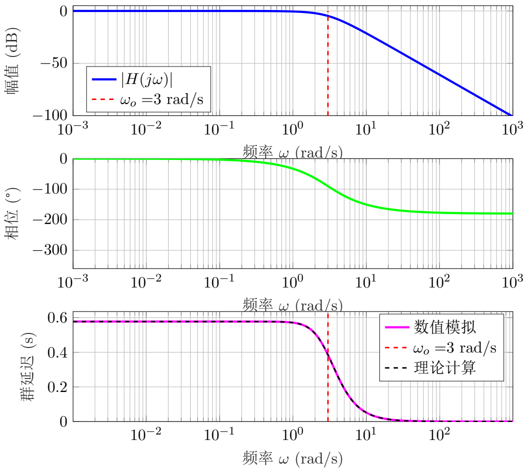

图: 二阶贝塞尔低通：通带内群延迟平坦，利于波形保真

频谱泄漏

DFT 隐含假设信号为周期延拓。有限长 N 点相当于乘矩形窗，时域相乘对应频域卷积，矩形窗频谱为 sinc，旁瓣高，导致：

- 非整周期采样时，能量从主频“泄漏”到旁频；
- 主瓣变宽、旁瓣明显，频率/幅值估计变差。

减轻办法：用旁瓣更低的**窗函数**替代矩形窗，使边缘平滑过渡到零。

常用窗函数（概要）

- **矩形窗：** 主瓣最窄，旁瓣约 $-13\,\mathrm{dB}$，泄漏大。
- **汉宁窗：** $w[n] = 0.5 - 0.5\cos(2\pi n/(N-1))$，旁瓣约 $-32\,\mathrm{dB}$，主瓣约为矩形 2 倍宽。
- **汉明窗：** $0.54 - 0.46\cos(2\pi n/(N-1))$，第一旁瓣约 $-43\,\mathrm{dB}$。
- **布莱克曼窗：** 旁瓣约 $-58\,\mathrm{dB}$，主瓣更宽。
- **平顶窗：** 主瓣顶平坦，适合幅值精确测量，分辨率差。

选择需在频率分辨率、动态范围、幅值精度之间权衡。

同步采集与相位

多通道振动测试需各通道在同一时刻采样，以保证测点间相位关系正确，否则模态振型等会失真。相位误差与通道时延 Δt、频率 f 的关系：

$$\Delta\phi = 2\pi f\,\Delta t.$$

高频时同一 Δt 对应更大相位误差（例：1 ms 延迟在 100 Hz 约 36°）。

同步误差来源与补偿

误差来源：多路复用导致顺序采样延迟；时钟分配引起的 skew；晶振温漂；触发与调理电路延迟等。

补偿思路：

- 确定性误差：时域插值对齐、频域相位校正 $H_{\text{cor}}(\omega) = H_{\text{meas}}(\omega)e^{-i\omega\Delta t}$、校准表补偿。
- 随机误差：并行 ADC、高稳定时钟、优化布线等硬件与测试策略。

本章小结

- 正弦采样：$f_s = 2f$ 与 $f_s < 2f$ 无法唯一恢复；$f_s > 2f$ 可唯一确定 A, f, ϕ。
- 理想采样：冲激串、频谱周期延拓、奈奎斯特定理 $f_s > 2f_B$。
- 时域重构：理想低通、sinc 插值公式。
- 抗混叠：A/D 前低通，RC/贝塞尔等实现。
- 泄漏与加窗：矩形窗导致泄漏，汉宁/汉明/布莱克曼/平顶等窗的取舍。
- 多通道：同步必要性、$\Delta\phi = 2\pi f \Delta t$、误差来源与补偿。

谢谢!