实验模态分析

李丹

东南大学土木工程学院

2026 年 2 月 26 日

目录

频响函数的定义

N 自由度结构动力方程傅里叶变换后：

$$(-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{P}(\omega)$$

频率响应函数（FRF）矩阵：

$$\mathbf{H}(\omega) = (-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}, \quad \mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{P}(\omega).$$

$H_{jk}(\omega)$：在 k 自由度施加单位简谐荷载 $e^{i\omega t}$ 时，j 自由度的稳态响应。

- $\omega \to 0$ 时 $\mathbf{H}(\omega) \to \mathbf{K}^{-1}$（柔度矩阵）。
- **互易性**：$H_{jk}(\omega) = H_{kj}(\omega)$。

峰值拾取法概述

适用条件：小阻尼、比例阻尼、模态分布稀疏。

- 通过频响函数幅值谱的**峰值**确定固有频率。
- 比例阻尼下频响函数可模态分解：

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{-\omega^2 + i2\zeta_r\omega_r\omega + \omega_r^2}.$$

- 在 ω_s 附近可近似为单模态主导，振型与 FRF 列向量成比例：

$$\mathbf{H}_k(\omega_s) \propto \boldsymbol{\phi}_s, \quad \phi_{jr} = \frac{\mathrm{Im}(H_{jk}(\omega_r))}{\mathrm{Im}(H_{kk}(\omega_r))}.$$

- **固有频率**：幅频曲线局部极大值对应频率 ω_r（或由图像直接读峰）。
- **阻尼比**（半功率带宽法）：

$$|H_{kk}(\omega_a)| = |H_{kk}(\omega_b)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|H_{kk}(\omega_r)|, \quad \zeta_r = \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_r}.$$

- **振型**：在 ω_r 处取各测点 FRF 虚部之比（以某点为基准归一化）。
- 加速度频响函数 $\mathbf{Z}(\omega) = -\omega^2\mathbf{H}(\omega)$，峰值更丰富，工程中常用。

峰值拾取法注意事项

- **密集模态**：频率分辨率不足时难以区分相邻模态。
- **非比例阻尼**：复模态，振型提取误差增大。
- **噪声敏感**：需频域平均或窗函数提高信噪比。

峰值拾取法示例：位移频响与振型

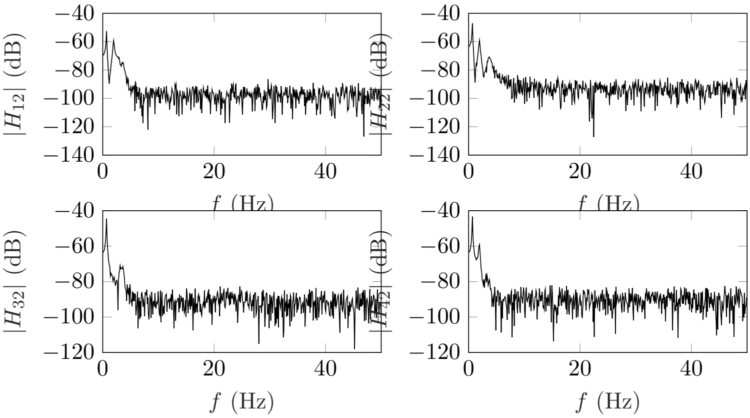


图: 位移频响函数幅值曲线，峰值对应固有频率

峰值拾取法示例：振型识别

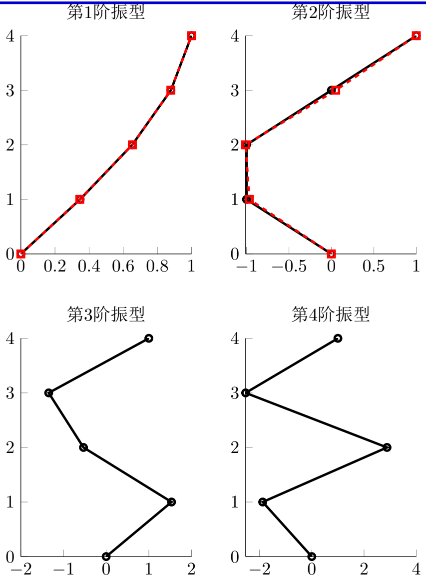


图: 由位移 FRF 虚部提取的振型（黑：真实，红：识别）

状态空间描述

连续时间动力系统：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c\mathbf{x} + \mathbf{B}_c\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}_c\mathbf{x} + \mathbf{D}_c\mathbf{u}.$$

$\mathbf{x}$：状态；$\mathbf{u}$：输入；$\mathbf{y}$：输出。二阶结构可写为一阶状态空间，例如

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{C}_c$、$\mathbf{D}_c$ 由传感器类型与布置决定（位移/加速度观测等）。

自由振动与矩阵指数

无外荷载、全状态可观时：$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c\mathbf{x}$，解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_c t}\mathbf{x}(0), \quad e^{\mathbf{A}_c t} = \mathbf{V}_c\, e^{\boldsymbol{\Lambda}_c t}\, \mathbf{V}_c^{-1}.$$

特征分解 $\mathbf{A}_c\mathbf{V}_c = \mathbf{V}_c\boldsymbol{\Lambda}_c$ 可将动力学解耦；$\mathbf{A}_c$ 的特征值与特征向量与结构模态参数（固有频率、阻尼比、振型）对应。稳定性：$\mathrm{Re}(\lambda_j^c) < 0$。

离散时间系统（采样周期 T）：

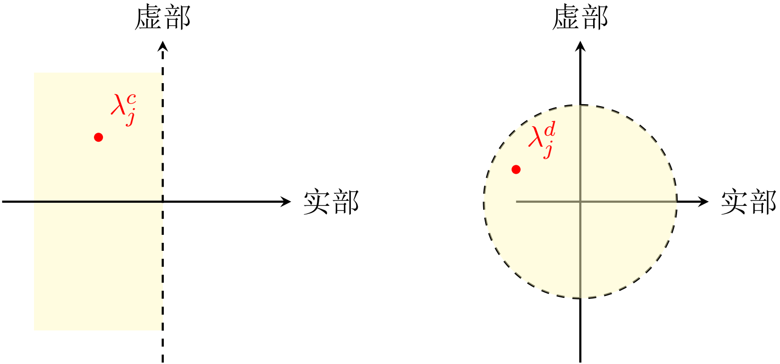
$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_n + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_n, \quad \mathbf{y}_n = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_n + \mathbf{D}_d \mathbf{u}_n.$$

与连续时间关系：

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}_c T}, \quad \mathbf{B}_d = \int_0^T e^{\mathbf{A}_c \tau} \mathbf{B}_c \, d\tau, \quad \mathbf{C}_d = \mathbf{C}_c, \quad \mathbf{D}_d = \mathbf{D}_c.$$

特征值 $\lambda_j^d = e^{\lambda_j^c T}$，特征向量相同。**稳定性：** $|\lambda_j^d| < 1$（连续时间左半平面映射到单位圆内）。

连续与离散稳定域



$$\mathrm{Re}(\lambda_j^c) < 0 \;\Rightarrow\; |\lambda_j^d| < 1$$

图: 连续时间稳定域（左半平面）与离散时间稳定域（单位圆内）

从自由振动或冲激响应的状态序列中估计线性演化算子。

- 数据矩阵：$\mathbf{X}_0 = (\mathbf{x}_0 \; \mathbf{x}_1 \; \cdots \; \mathbf{x}_{n-1})$，$\mathbf{X}_1 = (\mathbf{x}_1 \; \mathbf{x}_2 \; \cdots \; \mathbf{x}_n)$，满足 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}_d \mathbf{X}_0$。
- 最小二乘估计：$\hat{\mathbf{A}}_d = \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_0^{\dagger}$。
- 对 $\hat{\mathbf{A}}_d$ 特征分解得 $\hat{\lambda}_j^d$，转换到连续时间：$\hat{\lambda}_j^c = \ln(\hat{\lambda}_j^d)/T$。
- 固有频率与阻尼比：$\hat{\omega}_j = |\hat{\lambda}_j^c|$，$\hat{\zeta}_j = -\mathrm{Re}(\hat{\lambda}_j^c)/\hat{\omega}_j$；振型由特征向量提取。

DMD 示例：速度响应与振型

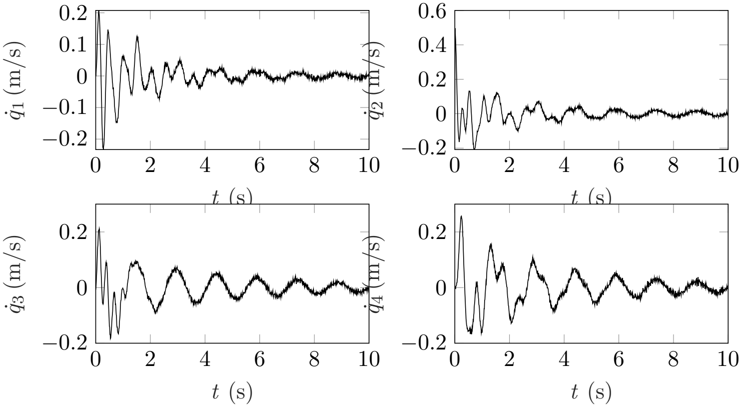


图: 结构速度响应（用于 DMD）

DMD 示例：识别振型

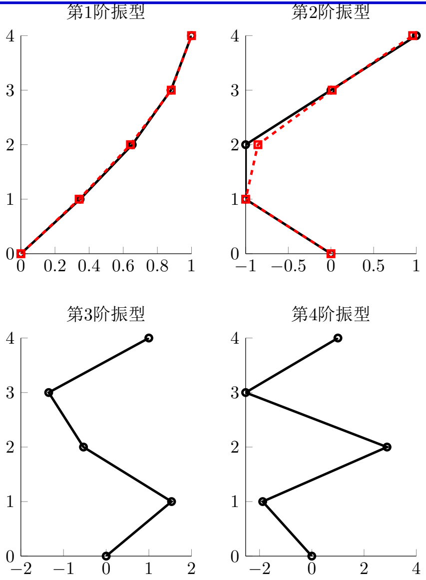


图: DMD 提取的振型（黑：真实，红：识别）

ERA（Eigensystem Realization Algorithm）从输入输出数据估计状态空间模型并提取模态参数。

- 输入：单位脉冲响应序列 $\mathbf{h}_n$（冲激试验或由 FRF 逆傅里叶变换得到）。
- 将 $\mathbf{h}_n$ 堆叠成 **Hankel 矩阵** $\mathbf{H}_0$、$\mathbf{H}_1$，可分解为可观矩阵与可控矩阵。
- 对 $\mathbf{H}_0$ 做 SVD，秩 k 截断得 $\hat{\mathcal{O}}_r$、$\hat{\mathcal{C}}_s$，进而估计 $\hat{\mathbf{A}}_d$、$\hat{\mathbf{B}}_d$、$\hat{\mathbf{C}}_d$、$\hat{\mathbf{D}}_d$。
- 由 $\hat{\mathbf{A}}_d$ 特征值按 $\lambda^c = \ln(\lambda^d)/T$ 得固有频率与阻尼比，振型由可观矩阵相应列得到。

稳定图

稳定图：横轴为模型阶次 k，纵轴为识别得到的固有频率。对 $k = 2N, 2N+2, \cdots$ 多次运行 ERA。

- 真实模态在多个阶次下形成**垂直稳定柱**。
- 虚假模态（噪声、计算误差）随阶次随机分布。
- 用于区分物理模态与噪声、确定合适截断阶数。

已知荷载与随机荷载

已知荷载：冲激试验直接得脉冲响应；或测激励 $p(t)$ 与响应 $\mathbf{y}(t)$，由 $H(\omega) = Y(\omega)/P(\omega)$ 再 IFFT 得脉冲响应。激励需宽频覆盖关心频段。

随机荷载（NExT）：输入不可测时，用参考通道加速度与各通道响应的**互相关函数**作为等效脉冲响应输入 ERA。要求激励近似平稳白噪声；参考点需避开振型节点。

ERA 示例：地震荷载—脉冲响应与稳定图

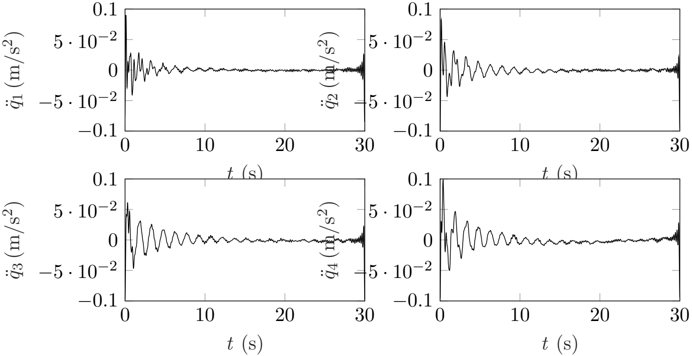


图: 由地震响应反演得到的脉冲响应

ERA 示例：稳定图

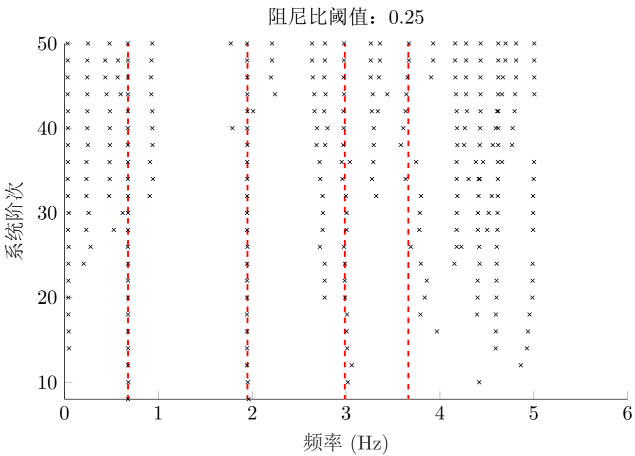


图: 地震荷载工况：稳定图（红虚线为理论固有频率）

ERA 示例：振型

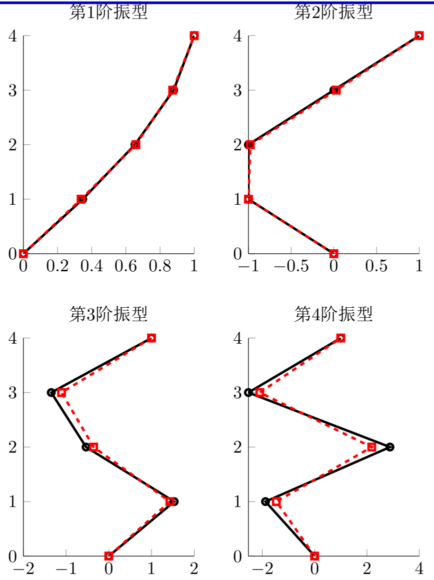


图: 地震荷载工况：ERA 提取的振型

ERA 应用建议

- **带通滤波**：限制在关心频带，抑制带外噪声；可对时程、FRF 或脉冲响应滤波，注意零相位滤波减少波形畸变。
- **截断 SVD**：合理选择秩 k，结合稳定图判断。
- **综合策略**：与峰值拾取法等对比；多参考 NExT、多工况交叉验证；大结构可子结构分析。

本章小结

- **频响函数：** $\mathbf{H}(\omega) = (-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}$，互易性，$\omega \to 0$ 为柔度。
- **峰值拾取法：** 幅频峰值→固有频率；半功率带宽→阻尼比；FRF 虚部比→振型；适用稀疏模态、小阻尼。
- **连续/离散状态空间：** $\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}_c T}$，稳定域左半平面　单位圆内。
- **DMD：** 由状态序列估计 $\mathbf{A}_d$，特征值→模态参数。
- **ERA：** 脉冲响应→Hankel→SVD→系统矩阵→模态参数；稳定图筛选；已知/随机荷载（NExT）。

谢谢!