

卡尔曼滤波

李丹

东南大学土木工程学院

2026 年 2 月 26 日



目录

- ① 最小二乘与递归最小二乘
- ② 状态传递与离散卡尔曼滤波
- ③ 混合卡尔曼滤波与噪声影响
- ④ 扩展卡尔曼滤波与无迹卡尔曼滤波
- ⑤ 工程实现与自适应卡尔曼滤波
- ⑥ 小结

最小二乘估计回顾

观测模型:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_d \mathbf{x} + \mathbf{v}.$$

- 经典最小二乘: 最小化残差

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}} \|\mathbf{y} - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}\|_2^2 \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{C}_d^T \mathbf{C}_d)^{-1} \mathbf{C}_d^T \mathbf{y}.$$

- 加权最小二乘: 噪声协方差 $\Sigma_{\mathbf{v}}$ 已知

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{C}_d^T \Sigma_{\mathbf{v}}^{-1} \mathbf{C}_d)^{-1} \mathbf{C}_d^T \Sigma_{\mathbf{v}}^{-1} \mathbf{y}.$$

- 多次测量时, 直接堆叠数据做批处理, 计算量随样本数迅速增加。

递归最小二乘 (RLS)

递推形式:

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_{n-1} + \mathbf{G}_n(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}_{n-1}).$$

- 引入估计误差协方差

$$\Sigma_n^{\mathbf{x}} = \mathbb{E}[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_n)^{\mathbf{T}}].$$

- 优化目标: $\mathbf{J}_n = \text{Tr}(\Sigma_n^{\mathbf{x}})$ 最小。
- 推导得到最优增益

$$\mathbf{G}_n = \Sigma_{n-1}^{\mathbf{x}} \mathbf{C}_d^{\mathbf{T}} (\mathbf{C}_d \Sigma_{n-1}^{\mathbf{x}} \mathbf{C}_d^{\mathbf{T}} + \Sigma_n^{\mathbf{v}})^{-1}.$$

- 思想: 根据误差协方差自适应调整“相信观测”还是“相信当前估计”。

状态传递与协方差递推

离散线性系统：

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1}, \quad \mathbf{w}_{n-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{n-1}^w).$$

- 状态均值递推：

$$\boldsymbol{\mu}_n^x = \mathbf{A}_d \boldsymbol{\mu}_{n-1}^x + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{n-1}.$$

- 协方差递推（Lyapunov 方程）：

$$\Sigma_n^x = \mathbf{A}_d \Sigma_{n-1}^x \mathbf{A}_d^T + \Sigma_{n-1}^w.$$

- 高斯假设下，状态分布始终保持高斯，只需传播一阶、二阶矩。

离散时间卡尔曼滤波 (1/2)

系统与观测:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1},$$

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n,$$

$$\mathbf{w}_{n-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{n-1}^w), \quad \mathbf{v}_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_n^v).$$

时间更新 (预测):

$$\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{n-1},$$

$$\Sigma_{n|n-1}^x = \mathbf{A}_d \Sigma_{n-1|n-1}^x \mathbf{A}_d^T + \Sigma_{n-1}^w.$$

测量更新 (校正):

$$\mathbf{G}_n = \Sigma_{n|n-1}^x \mathbf{C}_d^T (\mathbf{C}_d \Sigma_{n|n-1}^x \mathbf{C}_d^T + \Sigma_n^v)^{-1},$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{n|n} = \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} + \mathbf{G}_n (\mathbf{y}_n - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}),$$

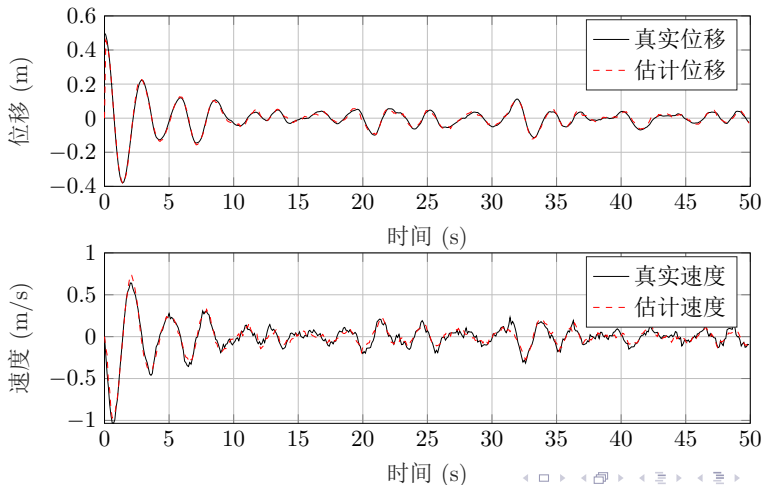
$$\Sigma_{n|n}^x = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_d) \Sigma_{n|n-1}^x (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_d)^T + \mathbf{G}_n \Sigma_n^v \mathbf{G}_n^T.$$

- 与 RLS 完全一致的结构，只是显式引入了状态方程和过程噪声。
- 直观理解：在“模型预测”和“新观测”之间做最优折中。

混合卡尔曼滤波示例 (1/2)

单自由度结构：仅测加速度，状态为位移与速度，采用预测在连续时间、更新在离散时间的混合卡尔曼滤波。

- 即便初始状态猜测较差，只要模型合理、噪声统计设置合适，滤波也能逐步收敛到真实状态。



混合卡尔曼滤波示例 (2/2)

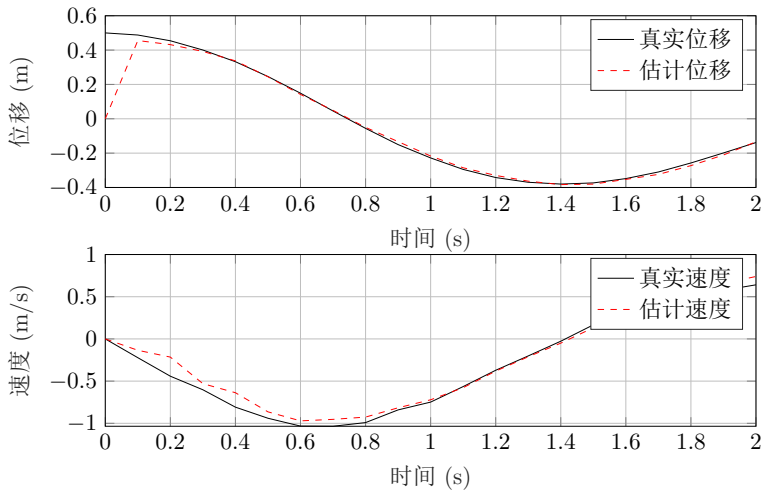


图: 混合 KF: 局部放大 (收敛细节)

噪声对滤波性能的影响 (1/2)

卡尔曼增益:

$$\mathbf{G}_n = \Sigma_{n|n-1}^x \mathbf{C}_d^T (\mathbf{C}_d \Sigma_{n|n-1}^x \mathbf{C}_d^T + \Sigma_n^v)^{-1}.$$

- 观测噪声小: $\Sigma_n^v \rightarrow \mathbf{0}$, 更信任观测, \mathbf{G}_n 较大。
- 观测噪声大: $\Sigma_n^v \rightarrow \infty$, 更信任模型, $\mathbf{G}_n \approx \mathbf{0}$ 。
- 系统噪声大: Σ_{n-1}^w 大, 先验协方差大, \mathbf{G}_n 变大。

$$\frac{\Sigma_{n-1}^w}{\Sigma_n^v} \propto \frac{\text{对观测的信任度}}{\text{对模型的信任度}}.$$

噪声对滤波性能的影响 (2/2)

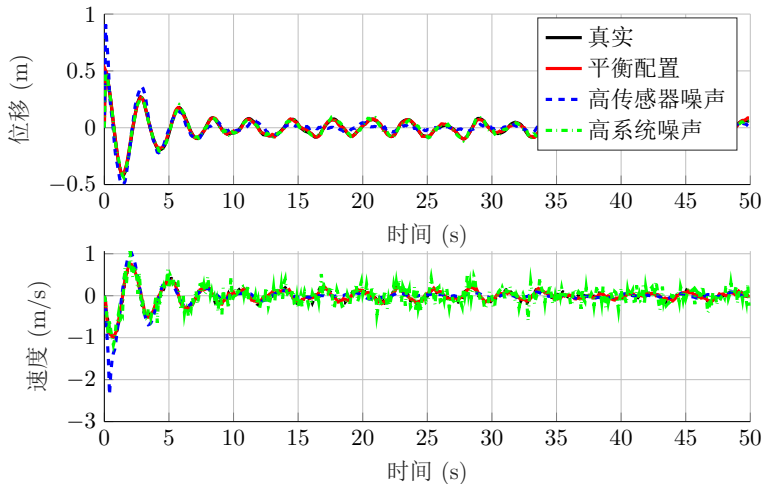


图: 不同噪声配置下的状态估计

非线性系统:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n) + \mathbf{w}_n, \quad \mathbf{y}_n = \mathbf{h}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{v}_n.$$

思想: 在每个时间步对 f, h 进行局部线性化, 再套用线性 KF 公式。

- 计算雅可比矩阵:

$$\mathbf{F}_n = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_n|n}, \quad \mathbf{H}_n = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_n|n-1}.$$

- 用 $\mathbf{F}_n, \mathbf{H}_n$ 代替 $\mathbf{A}_d, \mathbf{C}_d$ 做预测与更新。
- 适用于弱非线性系统; 强非线性时线性化误差会带来偏差甚至发散。

无迹卡尔曼滤波 (UKF)

UKF 用**无迹变换**传播均值与协方差，避免显式线性化。

- 构造一组带权 Sigma 点 $\{\chi^{(i)}\}$ ，使其在输入空间的均值/协方差与当前估计一致。
- 通过非线性函数传播： $\chi^{(i)} \mapsto \psi^{(i)} = f(\chi^{(i)})$ 。
- 在输出空间对 $\{\psi^{(i)}\}$ 做加权求和，得到新的均值与协方差。
- 对强非线性映射，相比 EKF 通常有更好的精度与稳定性。

EKF 与 UKF 对比示意

二维高斯随机变量经非线性坐标变换时：

- **EKF**：在当前估计点线性化，仅用一阶导数近似非线性映射，输出分布可能出现明显偏差。
- **UKF**：通过一组精心选取的 Sigma 点传播非线性，可更准确捕捉均值漂移和协方差“扭曲”。
- 在强非线性场景中，UKF 往往比 EKF 更稳定、更接近真实数值模拟结果。

协方差更新的数值稳定性

直接更新:

$$\Sigma_{n|n}^x = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_d) \Sigma_{n|n-1}^x.$$

在有限精度下可能破坏对称正定性，导致滤波发散。改用 **Joseph** 形式:

$$\Sigma_{n|n}^x = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_d) \Sigma_{n|n-1}^x (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_d)^T + \mathbf{G}_n \Sigma_n^v \mathbf{G}_n^T.$$

- 必要时可加入**正则化**（在对角线上加小正数）防止协方差矩阵病态。
- 数值稳定性是工程实现中比理论推导更常遇到的问题。

实际应用中， Σ^w 、 Σ^v 往往未知或时变。

- 根据残差序列统计特性在线估计噪声协方差。
- 利用 EM、贝叶斯方法或滑动窗口估计来更新 Σ^w 、 Σ^v 。
- 自适应调整后，可在模型失配、工况变化时保持较好的滤波性能。

本章小结

- 从最小二乘与递归最小二乘出发，引出估计误差协方差与最优增益的思想。
- 将状态传递加入，得到离散时间卡尔曼滤波预测-更新框架。
- 通过混合 **KF** 与噪声配置案例，理解模型噪声与观测噪声的权衡。
- 面向非线性系统，采用 **EKF**（线性化）与 **UKF**（无迹变换）扩展卡尔曼思想。
- 工程实现中关注协方差数值稳定性与自适应噪声估计，提高滤波鲁棒性。

谢谢！