模型修正

李丹

东南大学土木工程学院

2026 年 2 月 26 日

目录

模型修正的基本思想

- **目标**：利用振动试验识别的动力特性（固有频率、阻尼比、振型、FRF 等）**反推**并修正数值模型参数，使数值模型响应尽量接近实测。
- **应用**：提高数值模型预测精度，为抗震分析、振动控制、损伤识别、加固设计提供更可靠依据。
- **本质**：一个**反演/优化**问题——以“试验数据”为约束，求解“模型参数”的最优估计。
- **分类**：频域修正（基于 FRF 或模态参数）与时域修正（基于时程响应、滤波算法）。

直接参数化建模

以刚度矩阵为例，将**物理参数**直接作为待修正量：

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n_{\text{elem}}} \mathbf{K}_i^{\text{e}}(\boldsymbol{\theta}),$$

其中 $\boldsymbol{\theta}$ 为弹性模量、截面尺寸或单元刚度等物理参数。

- **优点**：参数物理意义清晰，便于把修正结果与“构件刚度劣化/损伤”对应。
- 例：两层剪切框架，层间刚度 θ_1, θ_2：

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_2 & -\theta_2 \\ -\theta_2 & \theta_2 \end{pmatrix}.$$

- 适合待修正参数不多、且希望直接解释为物理刚度/质量变化的情形。

相对参数化建模

相对参数化：以“初始模型”为基准，参数表示为**增量或修正系数**：

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{K}_0 + \sum_{i=1}^{n_\theta} \theta_i \mathbf{K}_i.$$

两层剪切框架示例，初始层间刚度为 k_0：

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{K}_0 + \theta_1 \mathbf{K}_1 + \theta_2 \mathbf{K}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2k_0 & -k_0 \\ -k_0 & k_0 \end{pmatrix} + \theta_1 \begin{pmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \theta_2 \begin{pmatrix} k_0 & -k_0 \\ -k_0 & k_0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

- **优点**：便于在已有有限元模型基础上“微调”少量参数，保持矩阵结构特性。
- **常见做法**：只对关键单元或子结构引入修正参数，降低识别维数。

结构模型修正的一般流程

1. 建立初始有限元/数值模型（材料、几何、边界条件与连接）。
2. 选择参数化方式与待修正参数集 $\boldsymbol{\theta}$（刚度、阻尼、质量、边界刚度等）。
3. 设计并实施振动试验，获取时程响应或模态参数（$\hat{\omega}_r, \hat{\boldsymbol{\phi}}_r$ 等）。
4. 构造目标函数 $J(\boldsymbol{\theta})$（频域）或选择滤波框架（EKF/UKF 等，时域）。
5. 通过迭代优化或递推滤波更新参数，直至模型响应与试验满足精度要求。
6. 对比修正前后模型，解释参数变化与结构状态（损伤、劣化、加固效果等）的关系。

扩展状态空间模型

连续时间系统：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t), \\ \mathbf{y}_n &= \mathbf{C}_d(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n. \end{aligned}$$

同时识别**状态与参数**：

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\theta} \end{pmatrix}.$$

扩展状态方程：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{w}_{\boldsymbol{\theta}}(t) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}_n &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_d(\boldsymbol{\theta}_n) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{z}_n + \mathbf{v}_n. \end{aligned}$$

扩展状态下的非线性滤波

- 由于 $\mathbf{A}_c(\boldsymbol{\theta})$、$\mathbf{B}_c(\boldsymbol{\theta})$、$\mathbf{C}_d(\boldsymbol{\theta})$ 含参数，扩展状态方程一般是**非线性**的。
- 需使用 **扩展卡尔曼滤波（EKF）** 或 **无迹卡尔曼滤波（UKF）** 对扩展状态 $\mathbf{z}$ 进行估计：
  - EKF：在当前估计点线性化，对 $\mathbf{z}$ 做一阶近似。
  - UKF：利用 Sigma 点传播非线性，提高对参数的估计精度与稳定性。
- 优点：统一框架下同时获取**结构响应状态**与**参数**，便于在线模型修正与健康监测。

扩展状态 EKF/UKF 实施步骤（概要）

- 选取扩展状态 $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\theta} \end{pmatrix}$，设定噪声协方差 $\boldsymbol{\Sigma}^{\mathbf{w}}$、$\boldsymbol{\Sigma}^{\mathbf{v}}$、$\boldsymbol{\Sigma}^{\boldsymbol{\theta}}$。
- 初始化 $\hat{\mathbf{z}}_0$ 与协方差 $\boldsymbol{\Sigma}_0^{\mathbf{z}}$（可由名义模型或工程经验给出）。
- 对每个采样时刻 n，重复以下步骤：
  - **预测**：在当前参数估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n-1}$ 下，将模型推进到 t_n，得到 $\hat{\mathbf{z}}_{n|n-1}$ 与 $\boldsymbol{\Sigma}^{\mathbf{z}}_{n|n-1}$。
  - **线性化或 Sigma 点生成**：EKF 计算雅可比矩阵，UKF 生成并传播 Sigma 点。
  - **更新**：利用观测 $\mathbf{y}_n$ 计算卡尔曼增益，得到 $\hat{\mathbf{z}}_{n|n}$ 与 $\boldsymbol{\Sigma}^{\mathbf{z}}_{n|n}$。
- 从 $\hat{\mathbf{z}}_{n|n}$ 中提取 $\hat{\mathbf{x}}_n$ 与 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$，作为当前的状态与参数估计。

人工参数噪声的作用与设置

扩展状态中的参数噪声 $\mathbf{w}_{\boldsymbol{\theta}}(t)$ 控制参数更新“活跃程度”：

- 噪声大：收敛快、**跟踪能力**强（适合时变参数/损伤演化），但稳态抖动大。
- 噪声小：稳态精度高、估计更**平滑**，但对参数突变不敏感。

常见设置策略：

- **固定值**：协方差取真实值的 1%-10%，适合参数基本恒定的场景。
- **衰减噪声**：初期噪声大加速收敛，随后按

$$\boldsymbol{\Sigma}_n^{\boldsymbol{\theta}} = e^{-\alpha n}\boldsymbol{\Sigma}_0^{\boldsymbol{\theta}}$$

  递减，提高稳态精度。
- **差异化/自适应**：对敏感参数给小噪声，对不敏感或时变参数给大噪声，可结合残差变化自适应调整。

基于模态参数的频域修正

思想：使**数值模型模态参数**与**实测模态参数**尽量一致。

- 以实验模态分析得到的 $\{\hat{\omega}_r, \hat{\boldsymbol{\phi}}_r\}$ 为目标，对模型参数 $\boldsymbol{\theta}$ 建立目标函数：

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_r w_{\omega,r}\Big(\omega_r(\boldsymbol{\theta}) - \hat{\omega}_r\Big)^2 + \sum_r w_{\phi,r}\Big\|\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\theta}) - \hat{\boldsymbol{\phi}}_r\Big\|^2.$$

- 也可直接以 FRF 或柔度矩阵为对比对象（频率点/模态范围内加权）。
- 通过**迭代优化**（梯度/拟牛顿/遗传算法等）寻找 $J(\boldsymbol{\theta})$ 最小的参数。

优化算法与约束处理

频域修正常见求解器：

- 基于梯度/海森矩阵的局部算法：共轭梯度、BFGS、信赖域等，收敛快但依赖初值。
- 全局优化：遗传算法、粒子群、模拟退火，抗局部极小但计算量大。

参数约束（如 $\theta_i > 0$、刚度单调关系等）的处理：

- **参数变换**：对数变换 $\theta = e^{\eta}$，Sigmoid 变换 $a < \theta < b$ 等。
- **投影/惩罚**：在迭代过程中将违反约束的解投影回可行域，或在目标函数中加入惩罚项。
- 约束处理要兼顾**物理合理性**与**数值稳定性**。

优化算法的工程实现要点

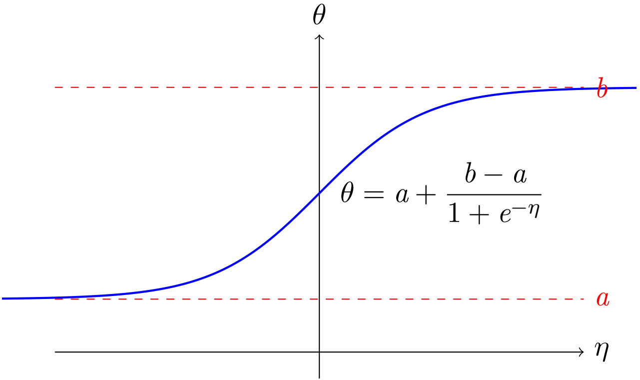
- **灵敏度/梯度计算：**
  - 解析法：直接推导 $\partial\omega_r/\partial\theta_i$、$\partial\phi_r/\partial\theta_i$ 等，精度高但推导复杂。
  - 数值差分：简单易实现，但对步长敏感、计算量大，可结合并行计算加速。
- **多起点策略：**局部优化易陷入局部极小，可从多组初值出发，比较多个候选解的目标函数与物理合理性。
- **正则化与权重选择：**
  - 在 $J(\boldsymbol{\theta})$ 中加入参数正则项（如 $\lambda\|\boldsymbol{\theta}\|_2^2$），抑制过大参数修正。
  - 合理设置频率、振型、FRF 等子项的权重 $w_{\omega,r}, w_{\phi,r}$，避免某一类观测主导优化结果。
- **停止准则：**可综合使用目标函数变化量、参数更新步长、模态匹配误差（频率相对误差、MAC 等）作为收敛判据。

Sigmoid 参数变换约束示意

对于区间约束 $a < \theta < b$，可使用 Sigmoid 变换

$$\theta = a + \frac{b-a}{1+e^{-\eta}}, \quad \eta \in \mathbb{R},$$

在无约束空间估计 η，再映射回 θ。



本章小结

- **模型修正**：利用振动试验结果反演结构参数，使数值模型更贴近真实结构。
- **参数化建模**：直接参数化与相对参数化，为频域和时域修正提供可调参数。
- **时域方法**：通过扩展状态空间 + EKF/UKF 等滤波器同时估计状态与参数，人工噪声控制收敛/精度/跟踪的权衡。
- **频域方法**：基于模态参数或 FRF 构造目标函数，结合约束优化算法反推刚度等物理参数。

谢谢！